

>> Modèles GARCH et risques de marché

Vincent BOISBOURDAIN, Consultant senior

L'évolution des marchés financiers possède certaines caractéristiques empiriques, que tout modèle cherche à reproduire. Le calcul des risques pris par une banque, un ensemble de traders, ou un trader particulier doivent, pour être les plus prédictifs possibles, rendre compte de ces caractéristiques.

Le modèle GARCH⁽¹⁾ est introduit en 1986 par Bollerslev. Il permet de considérer une caractéristique essentielle des marchés : la volatilité n'est pas constante dans le temps. En principe, la prise en compte de ce phénomène accroît le potentiel prédictif des modèles. Nous nous proposons dans cet article de montrer comment le modèle GARCH peut apporter une plus grande finesse dans le calcul de la VaR sur un exemple très simple en le comparant à des méthodes usuelles telles que les VaR historique, hybride et paramétrique.

>> Les caractéristiques empiriques des marchés

Les cours présentent essentiellement deux caractéristiques empiriques qui ne sont pas décrites par les mouvements Brownien⁽²⁾ et donc pas intégrées dans les méthodes de Monte-Carlo paramétriques, ou le modèle de Black & Schole. Ces caractéristiques, communes à de nombreux phénomènes complexes, dépassent le simple comportement des marchés.

Premièrement, les aléas des marchés suivent des lois favorisant les événements rares qui ne sont pas représentés par l'usuelle loi gaussienne. De plus, la loi de probabilité dépend de l'échelle de temps à laquelle les rendements sont évalués. A l'échelle de quelques mois, les rendements sont gaussiens. Au fur et à mesure que l'échelle de temps diminue, les événements rares sont favorisés par rapport à une distribution gaussienne. D'une certaine façon, les marchés sont plus risqués qu'on ne pourrait le penser. Ce type de comportement a été mis en évidence dans un autre domaine, par Kolmogorov dans les années 60, lors de l'étude des turbulences en mécanique des fluides.

Deuxièmement, la volatilité n'est pas stable dans le temps. Le marché connaît des périodes de fortes activités et des périodes de calme relatif. Son fonctionnement est intermittent. Ce type de phénomène a été mis en évidence par Hurst au début du 20^e siècle alors qu'il étudiait les crues du Nil pour y dimensionner correctement les barrages et permettre à la population de ne plus être exposée aux famines endémiques.

Ainsi, les événements extrêmes sont relativement fréquents et la volatilité présente une dynamique propre qu'on essaie de modéliser par des auto-corrélations non linéaires.

>> Description élémentaire des différents modèles

Les différents modèles de VaR : historique, hybride, paramétrique peuvent être présentés, pour tenter une présentation unifiée, comme des versions parfois simplifiées à l'extrême de la méthode de Monte-Carlo. Le modèle GARCH est une façon de sophistication la représentation des processus simulés dans la méthode de Monte-Carlo. Cette dernière a été utilisée pour la première fois par Buffon en 1777 pour calculer le nombre π . Cette méthode consiste à réaliser plusieurs prédictions dépendant du hasard, pour sonder à tâtons un événement futur, l'aire d'une surface complexe ou les décimales du nombre π . En générant plusieurs « trajectoires » aléatoires, il est possible de construire une densité de probabilités, rendant compte du « monde des possibles », trop complexe pour être d'emblée décrit analytiquement ou de façon algébrique.

Les différentes méthodes se distinguent les unes des autres par les dynamiques utilisées pour générer chaque trajectoire. Le modèle historique se contente de dynamiques futures identiques aux dynamiques passées. En postulant que le futur sera de même nature que le passé, le modèle historique n'est plus probabiliste, mais d'une certaine façon devient déterministe⁽³⁾. Le modèle hybride est similaire au modèle historique, mais donne plus d'importance aux événements passés les plus récents. Pour les modèles Monte-Carlo (et GARCH en particulier), les aléas futurs ne sont pas identiques à ceux du passé. Ils sont donnés par des générateurs de nombres aléatoires dans le cadre d'une loi de probabilité posée a priori⁽⁴⁾. La méthode dite « Monte-Carlo » (simple) procède à des tirages aléatoires dans une loi de probabilité fixée au regard des événements passés. Le modèle GARCH procède de la même façon mais à partir d'une loi plus complexe, évoluant dynamiquement

(1) GARCH : Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity model - (2) Sous l'hypothèse de marché parfait, il est usuel de supposer que les cours boursiers suivent une « marche aléatoire » (ou mouvement Brownien) car toute l'information disponible étant intégrée dans le cours d'aujourd'hui, la meilleure prévision pour demain est la valeur d'aujourd'hui. La variance autour de cette espérance étant supposée stable dans le temps, le modèle de référence est le modèle gaussien. - (3) De fait, si les tirages historiques sont considérés comme les issues d'un échantillon, on peut redonner une réelle dimension aléatoire. Ce débat, entre l'école française (objectiviste) et l'approche subjectiviste de la représentation aléatoire nous emmènerait trop loin pour être traité ici. - (4) Bien sûr, cette loi a priori est identifiée à partir des données passées, mais elle ouvre à une décomposition du risque total entre risque simulé et risque de modèle.

avec le temps. Enfin, les modèles paramétriques sont des simplifications du modèle Monte-Carlo. Lorsque la loi de probabilité rendant compte du « monde des possibles » est supposée suffisamment simple pour que la loi de la dynamique puisse être calculée analytiquement à partir des seuls paramètres de la loi initiale ou lorsque la dynamique du processus ne dépend pas de la trajectoire suivie, à l'inverse du prix des options à barrières par exemple, ou du comportement d'autres processus, la méthode Monte-Carlo se résume à la méthode paramétrique.

>> Comparaison des modèles au moment de la crise des subprimes

Sur le graphique ci-dessous, sont tracés les gains et les pertes d'un portefeuille de nominal 100, reproduisant les performances de l'indice Dow Jones, ainsi que les pertes maximum estimées à l'aide des calculs de VaR suivant les méthodes historique, paramétrique, hybride et GARCH. Ces prévisions de pertes maximum sont données avec un indice de confiance de 95 % pour un horizon de prédiction de un jour.

La crise des subprimes prend une nouvelle tournure le 18 juillet 2007. On constate qu'elle produit une agitation plus prononcée de la courbe des gains et pertes. Cette dynamique est captée avec un temps de retard par le modèle GARCH. Le modèle paramétrique reste insensible, tandis que les modèles historique et hybride semblent suivre très faiblement en tendance le modèle GARCH et les modifications de la volatilité.

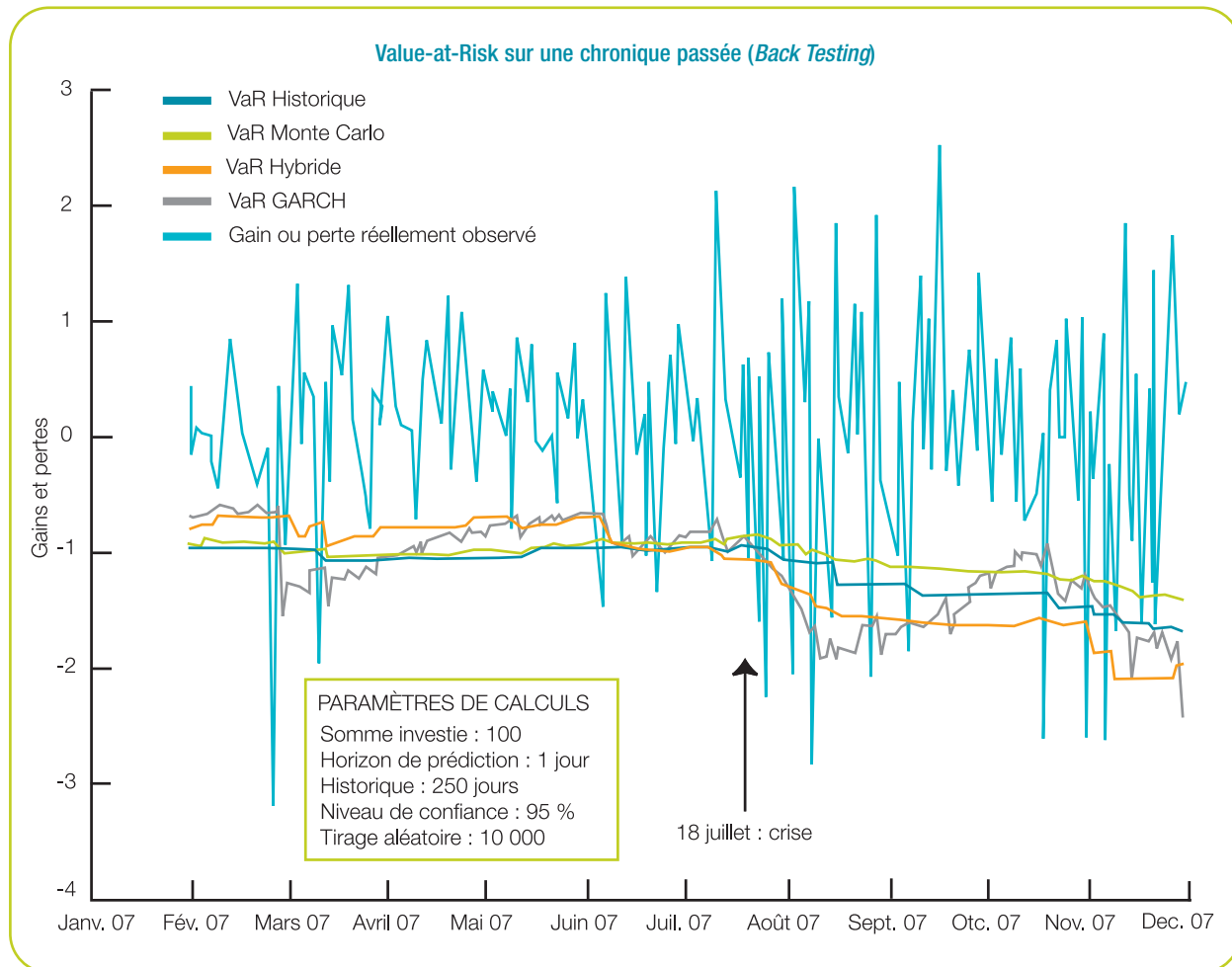
>> Construction et fonctionnement d'un modèle GARCH élémentaire

La première caractéristique des marchés peut être prise en compte en remplaçant la loi gaussienne par une loi de Student à l'aide de laquelle il est possible de calibrer l'épaisseur des queues de distribution. Avec de telles distributions, les événements rares sont plus fréquents qu'avec une loi gaussienne.

De plus, la volatilité dépend des événements passés à travers la volatilité et l'innovation passées (l'écart du rendement à la moyenne). Trois formules simples permettent de décrire le modèle :

$$\begin{aligned} \text{rendement}(t) &= \text{rendement_moyen} + \text{innovation}(t) \\ \text{innovation}(t) &= \text{volatilité}(t) \times \text{aléa}(t) \\ \text{volatilité}^2(t) &= A + B.\text{volatilité}^2(t-1) + C.\text{innovation}^2(t-1) \end{aligned}$$

Le mécanisme menant à des périodes volatiles est le suivant : un événement rare se produit par hasard, éloignant le rendement de sa moyenne et rendant l'innovation importante. Il en découle, à l'instant suivant, une croissance de la volatilité. Par conséquent, aux instants suivants, la volatilité reste importante. En l'absence d'innovation, il y a une lente décroissance de la volatilité. Mais le phénomène peut être encore renforcé, si par hasard, un tirage aléatoire ultérieur donne une innovation importante.



La dynamique d'un tel modèle est plutôt simple. La difficulté consiste à estimer de manière robuste les paramètres (A, B et C) caractérisant la dynamique à l'aide, par exemple, de la méthode du quasi-maximum de vraisemblance.

>> Estimation des paramètres et validité des modèles

En amont, avant même de calculer une VaR, les paramètres estimés par des méthodes statistiques font l'objet de tests. Il faut s'assurer que la série passée peut être décrite avec le modèle choisi. Le plus simple des tests consiste à recréer le bruit blanc qui aurait pu être la source de la série observée, puis de voir s'il suit la loi supposée, s'il n'y a pas d'auto-corrélations...

En aval, une fois la VaR calculée, il faut s'assurer que les violations observées sont en rapport avec l'indice de confiance des prédictions et qu'elles ne comportent pas de corrélations inter-temporelles.

>> Pour aller plus loin avec les modèles autorégressifs

D'une part, le modèle GARCH(1,1)-Student présenté ci-dessus est rapproché de modèles très simples, sans caractères autorégressifs, et sans dynamique. Pour mieux cerner l'apport de ce modèle, une comparaison avec des modèles similaires est souhaitable. On peut donc proposer une mise en balance du modèle GARCH(1,1)-Student avec des modèles autorégressifs simples (AR, ARCH), le modèle GARCH(1,1)-Normal, des modèles GARCH(n,m) avec n et m plus grand que 1 et des modèles présentant des dynamiques plus complexes. La littérature académique fourmille de sophistication : EGARCH, QGARCH, IGARCH, GJR-GARCH, GARCH-M.

D'autre part, si la dynamique de la volatilité peut être reproduite à l'aide d'un modèle GARCH univarié pour faire des anticipations sur un portefeuille, la dynamique des corrélations entre les différents actifs peut aussi faire l'objet de simulations dynamiques. En pratique il s'agit bien d'estimer un modèle GARCH multivarié. Cependant, ces modèles nécessitent de mesurer un grand nombre de paramètres. Par exemple, pour le plus simple des modèles bivariés, il est nécessaire d'apprécier 27 paramètres. L'ordre de grandeur du nombre de paramètres est de N^2 où N est le nombre d'actifs du portefeuille. Ce type d'approche se heurte en principe à des problématiques de temps de calcul élevé. C'est toutefois l'une des pistes sérieuses pour modéliser les « changements de régime » en cas de crise. Le mécanisme de « *flight to quality* » rend anti-corrélés les prix des actions et ceux des obligations souveraines, usuellement positivement corrélés.

>> Les apports du modèle GARCH élémentaire pour le calcul de la VaR

Deux principaux avantages se dégagent de la comparaison des différents modèles ci-dessus.

POINT DE VUE

« THE BLACK SWAN – THE IMPACT OF THE HIGHLY IMPROBABLE »

Le dernier ouvrage de Nassim Nicholas Taleb, « *The Black Swan – The impact of the highly improbable* » offre une lecture critique des modèles d'évaluation classiques. Un ouvrage « aux extrêmes » des modèles, engagé et parfois provoquant prenant toute sa dimension dans notre actualité très mouvementée.

Le *Black Swan* est un triptyque qui se définit selon les attributs : rareté, sévérité (fort impact) et prédictibilité postérieure. Ce concept est inspiré de la métaphore selon laquelle avant la découverte de cygnes noirs en Australie, la conscience collective considérait que les cygnes ne pouvaient être que blancs. Des études génétiques démontreront a posteriori que des cygnes peuvent bel et bien être noirs. Ceci illustre notre limite à apprendre par l'observation et l'expérience car trop focalisé sur les généralités.

Plus précisément, un *Black Swan* est un événement :

- 1) inattendu, au-delà de ce qu'une analyse même approfondie permet de prévoir,
- 2) extrême au niveau de son impact,
- 3) non prévisible, mais notre nature va nous pousser à expliquer l'événement a posteriori de manière à devenir compréhensible, mais aussi logique.

Les Krach boursiers ou encore les fraudes internes conséquentes voire démesurées constituent des *Black Swan*, selon Nassim Nicholas Taleb. Une chose est certaine dans ces situations : les modèles de contrôle de risque, et de modélisation basés sur les théories de Markowitz ou Black & Schole ne fonctionnent pas. Ces modèles reposent sur l'idée que l'évolution des cours est quantifiable en série d'événements moyens décrits au moyen d'une courbe de Gauss. Or, ils volent en éclat quand l'inattendu surgit. Nassim Nicholas Taleb la qualifie d'ailleurs de « *Great Intellectual Fraud* ».

Les principes théoriques de l'auteur doivent toutefois être pondérés dans la mesure où les *risk managers* disposent d'une palette d'outils « prédictifs ». Ceux-ci ont leurs limites, mais la recherche ne cesse de progresser et d'enrichir la littérature quantitative.

Une bonne compréhension et utilisation de ces outils permet au *risk manager* d'approcher ces fameuses extrémités dites en queue de distribution. On peut noter à titre d'exemple la forte complémentarité de certains types de VaR et des stress scenarios, où une juste calibration de la sévérité des chocs appliqués aux paramètres de marché permet de simuler des configurations extrêmes de marché. Mais encore une fois, attention de ne pas surestimer notre capacité à gérer le risque, avertit Taleb, car si les modèles permettent de connaître l'information du domaine du possible, la trajectoire suivie demain reste inconnue.

C'est dans cet esprit qu'à la fin des années 90, l'auteur, ancien trader au sein de la First Boston, lancera le fond *Empirica* dont le principe est d'accepter de perdre un peu chaque jour en achetant des options très en dehors de la monnaie, mais dans l'attente d'un événement qui lui permettra d'en gagner beaucoup. Pour certains acteurs de marchés, l'expression est entrée dans le jargon, on peut être victime d'un *Black Swan*, mais on peut aussi en profiter.

Jean-Baptiste PRÉVOTEAU, Manager

Le premier concerne les violations, c'est-à-dire les écarts constatés entre la prédiction maximale de perte et la perte effectivement réalisée lorsque celle-ci dépasse la prédiction. Avec le modèle GARCH, les violations de la VaR sont plutôt moins importantes qu'avec les autres modèles. Si bien qu'en cas de défaut de la prédiction, les impacts d'un provisionnement insuffisants sont moins importants.

Le second avantage réside dans le fait que les fonds propres peuvent être gérés d'une manière plus dynamique, et réinvestis en partie dans des activités plus rentables.

>> Conclusion

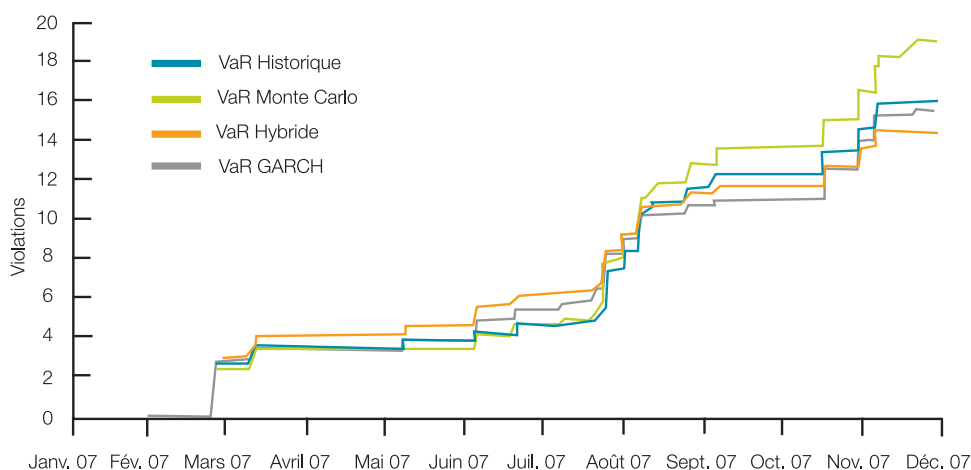
Les modèles GARCH présentent un intérêt pour s'adapter aux changements de régime assez rapidement. Toutefois, ils ne permettent pas de prévoir des crises soudaines telles

que le 11 septembre ou la crise des subprimes, l'information étant brusquement révélée et ne se retrouvant pas dans l'historique des cours.

Aux côtés des modèles GARCH, pour tenir compte de la dynamique de la volatilité, d'autres approches ont été développées, comme les modèles à changement de régime, à volatilité stochastique, les processus de Lévy, les modèles multi-fractals, ... Ces modèles peuvent appréhender d'autres caractéristiques empiriques des cours, comme par exemple « l'effet de levier » et anticiper encore plus finement les risques.

Au-delà des marchés financiers, ces modèles décrivent finement la nature aléatoire de nombreux phénomènes. Les concepts et les méthodes sous-jacentes pour le calcul de la VaR sont extensibles par nature à l'assurance ●

Somme des violations au cours du temps



ÉVÉNEMENTIEL > 10 juin 2008 > Paris

*OTC Conseil en partenariat avec
SLIB, BNP Paribas Securities Services et Société Générale
organisent un petit-déjeuner sur le thème :*

Evolutions de Place et réglementaires à horizon 2013/2015

Dans un contexte où le monde du Cash et celui du Titre sont de plus en plus imbriqués, et doivent conjuguer des projets orientés business avec des évolutions réglementaires, techniques ou encore organisationnelles avec une dimension internationale, cette table ronde fera un état des lieux pragmatique articulé autour de :

- L'inventaire des projets vous impactant,
- Les interdépendances,
- Les jalons clés et le chemin critique,
- Le pilotage par les risques et les conditions de réussite,
- Les zones d'incertitude.

Pour plus d'information, contactez Isabelle DA COSTA : idadcosta@otc-conseil.fr

VOTRE CONTACT
OTC CONSEIL

Jean-François KEITH – jfkeith@otc-conseil.fr